

Geometrie

Körperberechnungen

Teil 1

Prisma - Zylinder
Pyramide - Kegel
Pyramidenstumpf - Kegelstumpf
Kugel - Kugelteile

Datei Nr. 11610

Friedrich Buckel

Stand: 30. April 2016

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Inhalt

§ 1	Prismen	3
1.1	Quader	3
1.2	Würfel	4
1.3	Prisma mit Dreieck als Grundfläche	4
	Einschub: Berechnung des gleichseitigen Dreiecks	5
1.4	Schiefe Prismen	6
§ 2	Zylinder	7
	Hohlzylinder	10
§ 3	Pyramiden	11
3.1	Quadratische Pyramiden	11
3.2	Regelmäßige dreiseitige Pyramiden	17
	Spezialfall: Tetraeder	19
§ 4	Pyramidenstumpf	20
§ 5	Kegel	25
5.1	Senkrechter Kreiskegel	25
5.2	Kegel im Kegel	29
§ 6	Kegelstumpf	32
6.1	Übungen	32
6.2	Herleitungen einiger Formeln	34
§ 7	Kugel und Kugelteile	36
7.1	Kugel	36
7.2	Hohlkugel	39
7.3	Kugelkappen und Kugelausschnitt	42
	Lösungen der Aufgaben	44 - 69

Hinweis zur Genauigkeit von Ergebnissen

Viele neigen dazu, Taschenrechnerergebnisse möglichst genau abzuschreiben. Wenn man beispielsweise aus $r = 2,4 \text{ cm}$ und $h = 3,7 \text{ cm}$ das Volumen eines Zylinders berechnet:

$$V_1 = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 2,4^2 \cdot 3,7 \text{ cm}^3 = 66,95362263 \text{ cm}^3, \text{ dann ist das}$$

$\pi \times 2.4^2 \times 3.7$
66.95362263

kompletter Unsinn. Denn r ist ja nicht 2,4000 cm sondern bereits auf eine Dezimale gerundet. Also könnte es bei ganz genauem Hinsehen auch $r = 2,39 \text{ cm}$ oder $2,43 \text{ cm}$ sein. Man kann daher auch nicht erwarten, dass das Ergebnis genauer als 2 Ziffern ist.

Man verwenden wir eine genauere Messung: $r = 2,43 \text{ cm}$ und $h = 3,74 \text{ cm}$, dann folgt: $V_2 \approx 69.37995632 \text{ cm}^3$.

$\pi \times 2.43^2 \times 3.74$
69.37995632

Man erkennt daraus, dass man das obere Ergebnis mit den nur auf 2 Ziffern genauen Eingaben auch nur auf 2 Ziffern genau angeben darf: $V_1 \approx 67 \text{ cm}^3$. Vergleicht man das mit dem genaueren V_2 , dann erkennt man, dass selbst diese starke Rundung noch zu „genau“ ist, denn $V \approx 69 \text{ cm}^3$ wäre besser. Doch das schaffen wir mit $r = 2,4 \text{ cm}$ und $h = 3,7 \text{ cm}$ nicht.

Also: Bitte stark runden und unsinnige Genauigkeit vermeiden und sinnvoll runden,
etwa so: $O = 24017 \text{ cm}^2 \approx 24.000 \text{ cm}^2$.

§1 Prismen

Definition:

Ein Körper mit kongruenter und paralleler Oberseite und Unterseite und Parallelogrammen als Außenflächen heißt Prisma.

1.1 Die einfachste Form nennt man einen Quader.

Identifizierungsmerkmale:

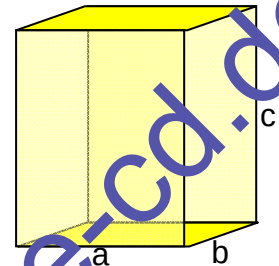
Ein Quader hat als Grundfläche und Deckfläche ein Rechteck, und die vier Außenflächen sind ebenfalls Rechtecke.

Damit haben wir überall rechte Winkel und einfache Formeln zur Berechnung:

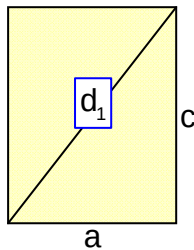
Kantenlänge: $k = 4a + 4b + 4c = 4 \cdot (a + b + c)$

Oberfläche: $O = 2ab + 2bc + 2ac = 2 \cdot (ab + bc + ac)$

Volumen: $V = a \cdot b \cdot c$

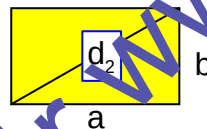


Jede Fläche eines Quaders hat eine Diagonale, die man mit Pythagoras berechnet:



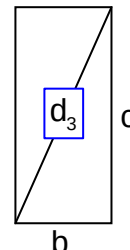
$$d_1 = \sqrt{a^2 + c^2}$$

Vorderseite und Rückseite



$$d_2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Oberseite und Unterseite



$$d_3 = \sqrt{b^2 + c^2}$$

Seitenflächen.

Dann gibt es noch vier **Raumdiagonalen**, die von einer Ecke zur entgegengesetzten Ecke quer durch den Quader gehen: Dies mag folgende Skizze andeuten:

Zur Berechnung geht man so vor:

Wir durchqueren die Grundfläche entlang d_2 und gehen dann entlang c senkrecht hinauf.

Nach Pythagoras folgt dann: $d_R^2 = d_2^2 + c^2$

Und wegen

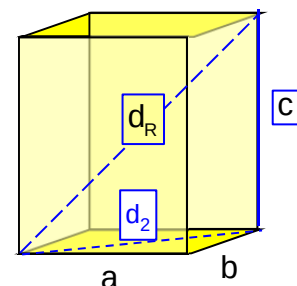
$$d_2^2 = a^2 + b^2$$

folgt insgesamt:

$$d_R^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Also gilt:

$$d_R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$



1.2 Ein besonders einfacher Quader ist der Würfel.

Bei einem Würfel sind alle Seiten gleich lang, also gilt $a = b = c$.
Aus den Formeln des Quaders wird dann:

Kantenlänge:

$$k = 12 \cdot a$$

Oberfläche:

$$O = 6a^2$$

Volumen:

$$V = a^3$$

Flächendiagonale ist:

$$d = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$

Raumdiagonale:

$$d_R = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$$

1.3 Ein Prisma kann auch jede andere Fläche als Grundfläche haben, etwa ein Dreieck. Betrachten wir den Fall des gleichseitigen Dreiecks.

Die Grundfläche G des gleichseitigen Dreiecks wurde im Schrägbild dargestellt und wirkt daher verzerrt.

Für das Volumen gilt die Grundformel:

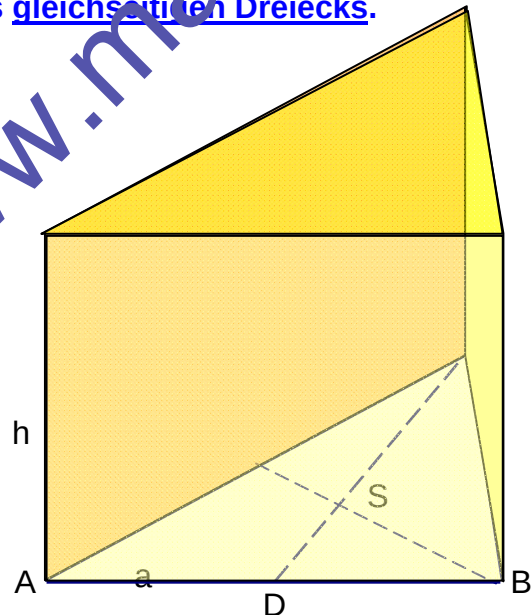
$$V = G \cdot h$$

Das gleichseitige Dreieck hat diese Grundfläche:

$$G = \frac{a^2}{4} \sqrt{3} \quad (\text{siehe Seite 3})$$

Somit folgt für dieses Prisma volumen:

$$V = \frac{a^2}{4} \cdot h \cdot \sqrt{3}$$



Die Berechnungsformeln für Volumen und Oberfläche leitet man sich am besten her und lernt sie nicht auswendig.

Die Oberfläche dieses Prismas besteht aus drei Rechtecken und zwei Dreiecken:

$$O = 3 \cdot ah + 2 \cdot \frac{a^2}{4} \sqrt{3} = 3ah + \frac{1}{2} a^2 \sqrt{3}$$

In diesen Formeln stecken Formeln des gleichseitigen Dreiecks.

Diese werden auf der nächsten Seite wiederholt und stammen aus dem Text 11311 (Pythagoras).

EINSCHUB**Die Berechnung des gleichseitigen Dreiecks**

Es hat drei gleich lange Seiten und drei gleich große Winkel, von denen daher jeder 60° beträgt. Jede Seitenhalbierende ist zugleich Mittelsenkrechte und Winkelhalbierende.

Die drei Seitenhalbierenden schneiden sich in einem Punkt, den man **Schwerpunkt** nennt.

Der **Schwerpunkt** hat die nützliche Eigenschaft, dass er die Seitenhalbierende im Verhältnis 1:2 teilt.

Also ist beispielsweise:

$$\overline{FS} = \frac{1}{3}\overline{FC}, \quad \overline{CS} = \frac{2}{3}\overline{CF} \quad \text{und daher} \quad \overline{SC} = 2 \cdot \overline{SF}.$$

Die **Höhe im gleichseitigen Dreieck**:

$h_\Delta = FC$ kann durch den Satz des Pythagoras berechnet werden.

Im rechtwinkligen Teildreieck FBC gilt:

$$\overline{BC}^2 = \overline{FB}^2 + \overline{FC}^2,$$

d.h.
$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h_\Delta^2$$

Daraus folgt:
$$h_\Delta^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2$$

Also erhält man
$$h_\Delta = \sqrt{\frac{3}{4}a^2}$$

Zieht man teilweise die Wurzel, also aus a^2 und aus 4, dann folgt das Ergebnis:

$$h_\Delta = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

Diese Herleitung sollte jeder Schüler beherrschen, weil sie oft benötigt wird.

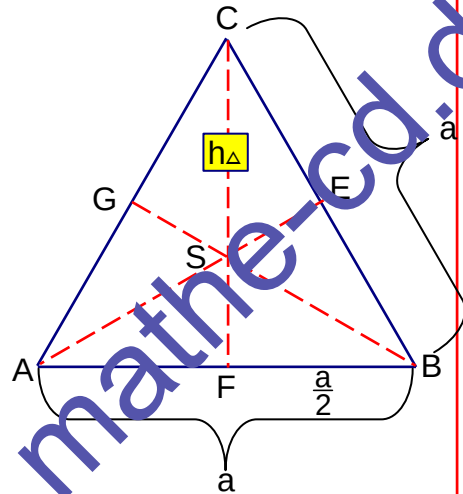
Folglich kann man den **Inhalt des gleichseitigen Dreiecks** so berechnen:

$$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_\Delta = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_\Delta = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$

Ergebnis:

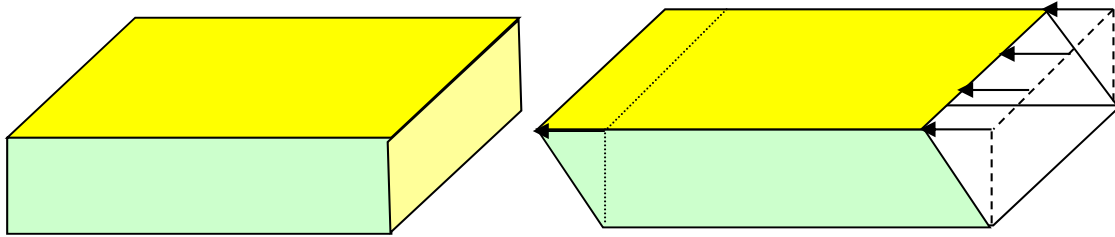
$$A_\Delta = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$

Dabei ist g eine als Grundseite gewählte Dreiecksseite, die h_Δ zugehörige Höhe im Dreieck.



1.4 Schiefe Prismen

Man stelle sich einen Papierstapel vor, dessen Seitenfläche schräg weggedrückt wird, etwa so:



Dann spricht man von einer räumlichen Scherung. Diese ändert das Volumen nicht, was ja auch einleuchtend ist, denn wir ändern ja dabei die Papiermenge nicht.

So kann man nachvollziehen, dass die Grundformel für das Volumen eines Prismas auch für schräge Prismen gilt:

$$V = G \cdot h$$

Dabei ist G eine als Grundfläche gewählte Fläche, etwa in der Abbildung die untere Fläche, h ist die zugehörige Höhe.

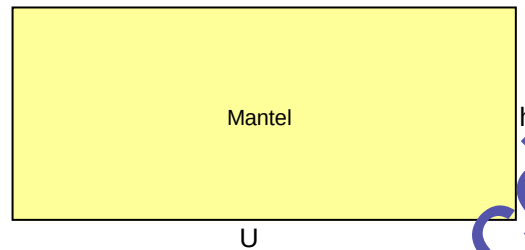
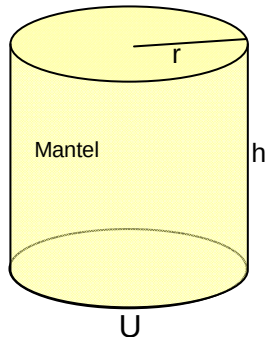
Aufgaben zu Prismen

- 1.1 Ein **Quader** hat die Grundkanten $a = 4 \text{ cm}$ und $b = 6 \text{ cm}$. Sein Volumen beträgt 168 cm^3 . Berechne seine Höhe und seine Oberfläche sowie die Länge seiner Raumdiagonalen.
- 1.2 Die Grundfläche eines Quaders beträgt 48 cm^2 , er hat das Volumen 624 cm^3 . Berechne seine Höhe. Wie groß sind die Seiten, wenn die Raumdiagonale die Länge $18,87 \text{ cm}$ hat?
- 1.3 Ein Quader mit quadratischer Grundfläche hat die Höhe 16 cm und das Volumen 400 cm^3 . Wie groß ist seine Oberfläche?
- 1.4 Ein Würfel hat das Volumen 728 cm^3 . Berechne seine Oberfläche.
- 1.5 Ein Würfel hat die Oberfläche 894 cm^2 . Berechne seinen Rauminhalt.
- 1.6 Die Raumdiagonale eines **Würfels** hat die Länge $7,07 \text{ cm}$. Wie groß sind Kanten, Oberfläche und Volumen?
- 1.7 Erstelle je eine Formel für Volumen und Oberfläche eines Würfels, deren Werte man direkt aus der Länge der Raumdiagonalen berechnen kann, ohne zuerst die Kantenlänge zu berechnen.
- 1.8 Berechne Rauminhalt und Oberfläche eines geraden dreiseitigen Prismas, dessen Abmessungen wie folgt gegeben sind: (Die Grundfläche hat die Seiten a , b und c .)
 - a) $a = 3 \text{ cm}$, $\alpha = 90^\circ$, $b = 6 \text{ cm}$, $h = 15 \text{ cm}$.
 - b) $a = b = c = h = 20 \text{ cm}$
 - c) $a = b = 5 \text{ cm}$, $c = 8 \text{ cm}$, $h = 12 \text{ cm}$.
 - d) $\alpha = 60^\circ$, $a = 8 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$, $h = 8 \text{ cm}$.
- 1.9 Ein Prisma hat als Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck. Sein Volumen beträgt 100 cm^3 . Berechne seine Grundkante, wenn die Höhe 10 cm beträgt.

Lösungen am Textende.

§2 Zylinder

Ein senkrechter Kreiszylinder (kurz auch oft nur Zylinder genannt), hat als Grund- und Deckfläche kongruente Kreise. Die Mantelfläche geht vom Grundkreis aus senkrecht nach oben und besteht aus einem ringförmig zusammen gebogenen Rechteck.



Volumen:	$V = G \cdot h = \pi r^2 h$
Mantel:	$M = U \cdot h = 2\pi r h$
Oberfläche:	$O = 2G + M = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r (r + h)$

Beispiel 1

Ein Zylinder hat den Radius 5 cm und die Höhe 80 cm. Berechne Volumen und Oberfläche.

Lösung:

$$V = \pi \cdot 25 \cdot \text{cm}^2 \cdot 80 \text{ cm} \approx 6283 \text{ cm}^3$$

$$O = 2\pi \cdot 5 \text{ cm} \cdot (5 \text{ cm} + 80 \text{ cm}) \approx 2670 \text{ cm}^2$$

Beispiel 2

Ein Zylinder hat die Höhe 30 cm und das Volumen 430 cm³. Berechne seinen Radius.

Lösung:

Man muss die Formel $V = G \cdot h = \pi r^2 h$ nach r^2 umstellen:

$$r^2 = \frac{V}{\pi h} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}} = \sqrt{\frac{430 \text{ cm}^3}{\pi \cdot 30 \text{ cm}}} \approx 2,1 \text{ cm}$$

Beispiel 3

Beweise diese Formel für den Kreiszylinder:

$$V = \frac{r}{2} \cdot M \quad \text{bzw.} \quad M = \frac{2V}{r}$$

Beweis: Volumen: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ (1)

Mantel: $M = 2\pi \cdot r \cdot h$ (2)

Division $\frac{(1)}{(2)}$: $\frac{V}{M} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{2\pi \cdot r \cdot h} = \frac{r}{2} \Rightarrow V = \frac{r}{2} \cdot M$

Beispiel 4 (schwer)

Ein Zylinder hat die Oberfläche 309 cm^2 und die Höhe 12 cm . Berechne seinen Radius.

Lösung: Oberflächenformel $O = 2\pi r^2 + 2\pi rh$
 nach r^2 ordnen: $2\pi r^2 + 2\pi rh - O = 0$ (*)

1. Lösungsweg: Man setzt die Werte von O und h in die Gleichung (*) ein:

$$2\pi r^2 + 24\pi r - 309 = 0$$

$$r = \frac{-24\pi \pm \sqrt{24^2\pi^2 + 8\pi \cdot 309}}{4\pi} \text{ cm} \approx \begin{cases} 3,2 \text{ cm} \\ < 0 \end{cases}$$

WISSEN:

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ hat die Lösungsformel } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Die 2. Lösung mit dem Minuszeichen vor der Wurzel ergibt einen negativen Radius, der zwar eine Lösung der Gleichung darstellt, aber geometrisch ohne Bedeutung ist.

2. (allgemeine) Lösung: $2\pi r^2 + 2\pi rh - O = 0$

$$r_{1,2} = \frac{-2\pi h \pm \sqrt{4\pi^2 h^2 + 8\pi \cdot O}}{4\pi}$$

denn r ist die Unbekannte statt x , und $a = 2\pi$, $b = 2\pi h$ und $c = -O$.

Setzt man jetzt Zahlen ein, folgt: $r = \frac{-2\pi \cdot 12 \pm \sqrt{4\pi^2 \cdot 144 + 8\pi \cdot 309}}{4\pi} \approx \begin{cases} 3,2 \text{ cm} \\ < 0 \end{cases}$

Aufgaben zu Zylindern

- 2.1 Eine oben offene zylindrische Regentonne aus Blech fasst 500 Liter. Ihre Höhe ist doppelt so groß wie ihr Durchmesser.
- Welchen Radius hat sie?
 - Wie viel kg Farbe werden für einen Anstrich innen und außen benötigt, wenn man für 1 m^2 etwa 100 g Farbe benötigt?
- 2.2 Berechne für einen Zylinder die jeweils fehlenden Größen:

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
r	8 cm		50 cm	24 cm				
h		6,5 cm			1,2 m	24 cm		
V	980 cm^3	1200 cm^3					150 m^3	3 m^3
M			4000 cm^2		3,5 m^2		75 m^2	-----
O				8200 cm^2		200 cm^2		20 m^2

- 2.3 Die Achsen eines Rechtecks verhalten sich 3:5. Es wird um die kleinere Seite gedreht, wodurch ein Zylinder entsteht. Seine Oberfläche hat den Inhalt $1280\pi \text{ cm}^2$.
Wie lang sind die Rechteckseiten?
- 2.4 Ein Rechteck hat den Umfang 60 cm. Dreht man es um eine Seite, entsteht ein Zylinder, der eine Mantelfläche von $400\pi \text{ cm}^2$ hat. Welche Abmessungen hat das Rechteck?
- 2.5 Ein Rechteck mit den Seiten a und b wird einmal um die Seite a gedreht und ein zweites Mal um die Seite b. Berechne das Verhältnis der Volumina der so entstehenden Zylinder.
- 2.6 Ein gerader Kreiszylinder ist um 7 cm höher als sein Durchmesser. Die durch seine Achse gehende Querschnittsfläche hat eine Diagonale der Länge 13 cm.
Berechne Mantel, Oberfläche und Volumen des Zylinders.

Demo-Text für www.mathe-cd.de